Sommaire

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer.

1. Convergence des Séries Numériques

1.1. Nature d'une série numérique

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle **suite des sommes partielles** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Définition :
On dit que la **série de terme général** u_n**, converge** $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sinon, on dit qu'elle **diverge**.

Notation : La **série de terme général** u_n se note $\sum u_n$.

Définition : Dans le cas où la série de terme général u_n converge, la limite, notée s, de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et on note : $s=\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.
Le reste d'ordre n de la série est alors noté r_n et il vaut : $r_n=s-s_n$.

Définition : La **nature** d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Étudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n). Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.
Dans certains cas, on reviendra à la définition en étudiant directement la convergence de la suite des sommes partielles.

> La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...

1.2. Exemple fondamental : les séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.
De plus, la somme est : $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration : $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ n'a de limite finie que si $|x| < 1$, cette limite est alors $\dfrac{1}{1-x}$.
D'autre part, pour $x = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = n+1$ diverge. ■

> La raison d'une suite géométrique est le coefficient par lequel il faut multiplier chaque terme pour obtenir le suivant.
> La somme des termes d'une série géométrique convergente est donc : $\dfrac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$.
> Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :
> $$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$
> Quand la série converge, il n'y pas de termes manquants... La formule est la même.

1.3. Condition nécessaire élémentaire de convergence

Théorème : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow (s_n)$ converge vers $s \Rightarrow (s_{n+1})$ converge vers s
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

> Si une série converge, son terme général tend vers 0.
> Dans le cas où le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série **diverge grossièrement**.

1.4. Suite et série des différences

Théorème : La suite (v_n) converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

Démonstration : On considère $\sum (v_{n+1} - v_n)$, sa suite des sommes partielles est (s_n) avec
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$
Les suites (s_n) et (v_{n+1}) sont de même nature, il en est de même de (v_n). ■

2. Opérations sur les Séries Convergentes

2.1. Somme de 2 séries

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent et ont pour somme s et s'
$\Rightarrow \sum (u_n + u'_n)$ converge et a pour somme $(s + s')$.

Démonstration : On applique simplement le théorème équivalent sur les suites, appliqué bien sûr aux suites des sommes partielles. ■

2.2. Produit par un scalaire

Théorème : $\sum u_n$ converge et est de somme s, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \sum (\lambda\, u_n)$ converge et est de somme $\lambda\, s$.

Démonstration : On applique encore le théorème équivalent sur les suites à la suite des sommes partielles. ■

Il y a bien sûr une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes.

3. Séries à termes positifs

3.1. Séries à termes positifs

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang
$\Leftrightarrow \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathrm{N},\ u_n \geqslant 0$

3.2. Critère de comparaison

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que
$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ u_n \leqslant v_n$
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Seule la première assertion est à montrer, l'autre est équivalente.
On le montre pour les séries positives ($\mathrm{N} = 0$).
On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $s'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $s' = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, on a $s_n \leqslant s'_n$.
Les suites (s_n) et (s'_n) sont croissantes et la deuxième converge. On a donc $s'_n \leqslant s'$. Ce qui prouve que (s_n) est croissante majorée et donc converge.

Pour le cas de séries positives à partir du rang N, on considère les sommes partielles $s_n = \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} u_k$... ■

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\, 2^n}$.
C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère de comparaison.
A l'infini, $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 et donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est une suite bornée par A. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n} \leqslant \mathrm{A}$
ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n\, 2^n} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.

Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n2^n}$ converge.

3.3. Critère d'équivalence

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N, telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : A partir d'un certain rang N, on a $0 \leqslant \frac{1}{2}u_n \leqslant v_n \leqslant 2u_n$.

Si $\sum u_n$ converge, $\sum 2u_n$ converge et donc $\sum v_n$ converge.

Si $\sum v_n$ converge, $\sum \frac{1}{2}u_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge. ■

On peut remarquer que le critère d'équivalence est, par linéarité, applicable à des séries de signe constant à partir d'un certain rang. En effet, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à celle de $\sum -u_n$.
Par ailleurs, on veillera à appliquer le critère d'équivalence au **terme général** : u_n, et non à la série : $\sum u_n$.

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$.
C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère d'équivalence.
$\dfrac{1}{1+2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc convergente.
Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$ converge.

3.4. Comparaison à une intégrale impropre

Théorème : Soit f une application **positive et décroissante** sur $[a, +\infty[$,

alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Et si elles convergent, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Remarquons d'abord que, comme $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante,

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\displaystyle\int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.
On prendra pour la démonstration $a = 0$. Comme f décroît sur $[n, n+1]$,

$\forall x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$

et en intégrant, comme on peut le voir sur la figure 1, page ci-contre : $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$.

d'où en sommant $\sum_{n=1}^{p} f(n) \leqslant \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{p-1} f(n)$, ce qui assure le résultat. ■

On a tout intérêt à mémoriser cette figure 1 qui, associée à la relation de Chasles, fournit démarche et résultat !

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2}$.

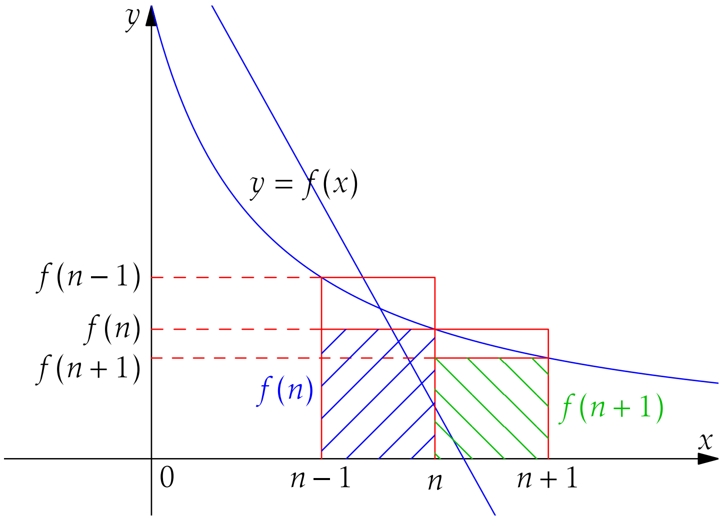

Figure 1 – **Comparaison série-intégrale**

f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, décroissante sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est de même nature que la série étudiée.
Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge.

3.5. Règle de Riemann

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ce sont les séries de Riemann.
Démonstration : On compare cette série avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et le résultat est immédiat. ■

Ceci nous donne la règle de Riemann.

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$, alors : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le critère d'équivalence et le théorème précédent. ■

3.6. Règle de d'Alembert

Théorème : $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
- et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

> Ce théorème est séduisant à priori, mais on tombe très souvent sur le cas douteux. Il s'utilise souvent dans le cadre des séries entières qu'on étudiera dans quelques chapitres.
> Avec les séries numériques, il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type : a^n.

Démonstration : Pour $l > 1$, la suite positive (u_n) croit et ne tend donc pas vers 0. On a bien la divergence grossière.
Pour $l < 1$, à partir d'un certain rang N $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1+l}{2}$.
et donc par récurrence très facile, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^{n-\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}} = \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n \dfrac{u_{\mathrm{N}}}{\left(\dfrac{1+l}{2}\right)^{\mathrm{N}}}$.
Cette dernière série est géométrique, le théorème de comparaison entre séries positives fournit le résultat. ■

Exemple : Étudions la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.
C'est une série à termes **strictement** positifs, on va pouvoir utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

Ceci prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

4. Séries Absolument Convergentes

4.1. Convergence absolue d'une série numérique

Définition : Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

4.2. Convergence des séries absolument convergentes

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration : Comme $|\mathrm{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$, il suffit par linéarité de le montrer pour les séries à valeur réelle.
Pour celles-ci, on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont positives et $u_n^+ \leqslant |u_n|$, $u_n^- \leqslant |u_n|$ prouvent par comparaison que ces séries convergent.
Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on a bien $\sum u_n$ converge. ■

Attention, ceci n'est pas une équivalence, on verra qu'il existe des séries semi-convergentes. L'exemple le plus classique est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

4.3. Inégalité de la somme

Théorème : $\sum u_n$ absolument convergente, alors : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

4.4. Inégalité triangulaire

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes,
alors, $\sum(u_n + v_n)$ est absolument convergente, et : $\sum |u_n + v_n| \leqslant \sum |u_n| + \sum |v_n|$

4.5. Un moyen classique de montrer une convergence absolue de série

Ceci n'est pas un théorème mais un procédé usuel qu'il faut justifier à chaque fois.
Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, comme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument.

5. Calcul Exact de Sommes de Séries

Pour l'instant, on ne connaît que la somme exacte des séries géométriques.

5.1. Sommation en dominos

On travaillera exclusivement sur un exemple.
Soit la série : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.
On montre facilement la convergence car $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann.
Pour le calcul de la somme, on revient en fait à la définition en calculant effectivement la somme partielle.
On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

d'où : $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$.
En effet, on peut procéder en dominos :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ u_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \cdots &= \cdots \\ u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Et en sommant, les termes se simplifient en dominos, et on obtient : $s_n = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n+1}$.
On aurait aussi pu réindexer la somme, on reprend le même calcul :
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{k} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

5.2. Utilisation de séries entières ou de séries de Fourier

On se reportera à ces chapitres que nous allons bientôt étudier pour calculer des sommes exactes de séries numériques.

6. Calcul Approché de Sommes de Séries

Il est quand même rare de savoir calculer facilement la somme exacte d'une série numérique. Ce qui fait l'importance du calcul approché de ces sommes.

6.1. Principe général

On nous donne une série convergente $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et un réel strictement positif ε.
On cherche un rang n tel que le reste d'ordre n, r_n vérifie $|r_n| \leqslant \varepsilon$.
Ensuite, on prendra s_n comme valeur approchée à ε près de s.
On va étudier les façons usuelles de chercher n selon la série.
Sauf dans le premier cas, en général, l'énoncé guide vers la méthode à utiliser...

6.2. En utilisant la comparaison série-intégrale

Condition : La convergence de la série peut se montrer en utilisant le critère de comparaison série-intégrale.
La série est donc : $\sum f(n)$ avec f décroissante, ou bien $\sum u_n$ avec $0 \leqslant u_n \leqslant f(n)$ et toujours f décroissante !

> C'est le seul cas que vous devez savoir traiter sans indication.

Bien sur la série et l'intégrale en $+\infty$ convergent ici.
Pour majorer le reste de la série, il suffit de le majorer dans le cas de $\sum f(n)$ avec f décroissante.
On a vu dans ce cas que : $f(p) \leqslant \displaystyle\int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui donne facilement : $r_n \leqslant \displaystyle\int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, il suffit donc de rendre cette quantité inférieure à ε pour que s_n soit une valeur approchée de s à ε près !

Exemple : $s = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ à 10^{-2} près.
Il nous suffit d'avoir : $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $\pi/2 - \operatorname{Arctan}(n) = \operatorname{Arctan}(1/n) \leqslant 10^{-2}$.
Enfin, il suffit d'avoir ici : $n \geqslant 100$.
$\sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée 10^{-2} près de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.
Il suffit enfin de calculer cette somme.

7. Développement décimal d'un nombre réel

7.1. Écriture décimale d'un nombre entier positif

Soit $n \in \mathbb{N}$, s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est sa propre écriture décimale !
Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de n par 10.
Le reste r_1 est un entier entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des unités de l'écriture décimale de n.
Le quotient q_1 est lui aussi un entier naturel, s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de n. Et c'est terminé l'écriture de n est « $q_1 r_1$ » !
Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de q_1 par 10.
Le reste r_2 est un entier entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de n.
Le quotient q_2 est lui aussi un entier naturel, s'il est entre 0 et 9, c'est à dire un chiffre : c'est le chiffre des centaines de l'écriture décimale de n. Et c'est terminé l'écriture de n est « $q_2 r_2 r_1$ » !

Sinon, on effectue la division euclidienne (de l'école primaire) de q_2 par 10...
Et l'histoire continue jusqu'à obtenir l'écriture décimale de n : la suite des quotients est strictement décroissante, on finit par avoir un quotient entre 0 et 9.

7.2. Écriture décimale d'un nombre réel entre 0 et 1

Compte tenu du fait qu'on sait écrire les entiers, il suffira bien de savoir écrire les réels de l'intervalle $[0,1[$ pour écrire tous les réels positifs.
Pour un réel négatif, on mettra simplement un signe « – » devant l'écriture de sa valeur absolue !
Soit $x \in [0,1[$, on fabrique deux suites de la façon suivante :
- x_0 reçoit la valeur de x
- u_1 est la partie entière de $10 \times x_0$, c'est un chiffre,
- puis x_1 en est la partie fractionnaire : $10 \times x_0 = u_1 + x_1$, x_1 est aussi un réel de $[0,1[$.
- u_2 est la partie entière de $10 \times x_1$, c'est un chiffre,
- puis x_2 en est la partie fractionnaire : $10 \times x_1 = u_2 + x_2$, x_2 est aussi un réel de $[0,1[$.
- ...

On s'arrête si, à un moment, $x_p = 0$, alors l'écriture de x est « $0, u_1 u_2 \dots u_p$ », de toutes façons, à partir de ce moment, tous les x_n et les u_n sont nuls !
Sinon on continue indéfiniment et alors, l'écriture de x est « $0, u_1 u_2 \dots u_p \dots$ ». C'est une écriture infinie.

Théorème : Dans tous les cas : $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n}$

Démonstration : Montrons maintenant par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n} = x_0 - x_n \times 10^{-n}$.
La vérification initiale est simple : $\sum\limits_{n=1}^{1} u_n \times 10^{-n} = u_1 \times 10^{-1} = (10 \times x_0 - x_1) \times 10^{-1} = x_0 - x_1 \times 10^{-1}$.
On l'admet au rang n, on le montre au rang $n+1$.
$\sum\limits_{p=1}^{n+1} u_p \times 10^{-p} = \sum\limits_{p=1}^{+n} u_p \times 10^{-p} + u_{n+1} \times 10^{-(n+1)} = x_0 - x_n \times 10^{-n} + (10 \times x_n - x_{n+1}) \times 10^{-(n+1)}$
$= x_0 - x_{n+1} \times 10^{-(n+1)}$.
La récurrence est maintenant démontrée !
Comme $x_n \in [0,1[$, $x_n \times 10^{-n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n} = x_0 = x$, ce qui est le résultat annoncé. ■

7.3. Écriture décimale des nombres rationnels

Théorème : On a $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ l'écriture décimale de x est périodique.

Démonstration : Il suffit, bien sûr, de le montrer pour les nombres réels de $[0,1[$.
Montrons d'abord l'implication directe.
Un nombre rationnel est un quotient d'entiers : $x = x_0 = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_0}{b}$, avec $0 \leqslant a_0 < b$.
Comme $x_1 = 10x_0 - u_1 = \dfrac{a_1}{b}$, avec $0 \leqslant a_1 < b$. Il vérifie donc la même propriété. Par une récurrence très facile, on obtient : $x_n = \dfrac{a_n}{b}$, avec $0 \leqslant a_n < b$.
Le nombre de numérateurs possibles est b, on finit donc par retomber sur le même ! Et à ce moment, le calcul qu'on fait est toujours identique...
Les suites (x_n) et (u_n) sont donc périodiques.
Réciproquement, maintenant, on suppose que la suite (u_n) est périodique de période p.
$x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n}$,

donc, $x \times 10^p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n+p} = u_1 \times 10^{p-1} + u_2 \times 10^{p-2} + \cdots + u_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n+p}$

$= u_1 \times 10^{p-1} + u_2 \times 10^{p-2} + \cdots + u_p + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+p} \times 10^{-n}$

$= u_1 \times 10^{p-1} + u_2 \times 10^{p-2} + \cdots + u_p + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times 10^{-n} = u_1 \times 10^{p-1} + u_2 \times 10^{p-2} + \cdots + u_p + x.$

Donc, $(10^p - 1)\, x \in \mathbb{N}$, et finalement : $x \in \mathbb{Q}$. ■

8. Compléments

8.1. Colbert, lycée numérique

Les logiciels connaissent la somme de nombreuses séries classiques...
Mais aucun logiciel ne permet de donner la somme exacte de toutes les séries !
En mode approché, pour une série convergente, on aura presque toujours un résultat correct.

a/ Maple

C'est le mot-clef « `sum` » qui permet de calculer une somme de série.

`> sum(1/(n**2),n=1..infinity);` calcule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$...

Dans l'extension `SumTools`, sous-extension `IndefiniteSum`, on trouve des outils pour calculer certaines sommes de séries, en particulier des fractions rationnelles.

b/ HP 40G-40GS

On trouve le symbole $\sum$ sur la touche +, L9C5.
Elle trouve bien $\frac{\pi^2}{6}$ à notre série test de base.

c/ HP 50G

On trouve le symbole $\sum$ sur la touche `SIN`, L5C3.
Elle trouve aussi $\frac{\pi^2}{6}$...

d/ TI 89

La commande `sum` est dans le menu `CALC`, L1C3 à partir de l'écran `HOME`, ou par le menu `MATH`, L8C3, sous-menu `Calculus`.
Devinez ce qu'elle répond à notre série test ?

e/ TI N-inspire CAS

C'est dans la bibliothèque de modèles qu'on trouve le symbole `sum`.

f/ ClassPad 300

8.2. Les mathématiciens du chapitre

Bernoulli Jacob 1654-1705 Mathématicien suisse de la grande famille des Bernoulli. On lui doit des travaux sur les courbes, les coordonnées polaires, le calcul intégral, les séries numériques... C'est lui qui a montré la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$...

Euler Léonard 1707-1783 L'apport de ce mathématicien suisse est plus que considérable. La définition précise de fonction, l'exponentielle complexe, les équations différentielles linéaires, les courbes paramétrées, les quadriques et, entre autres, de nombreux résultats sur les séries numériques...